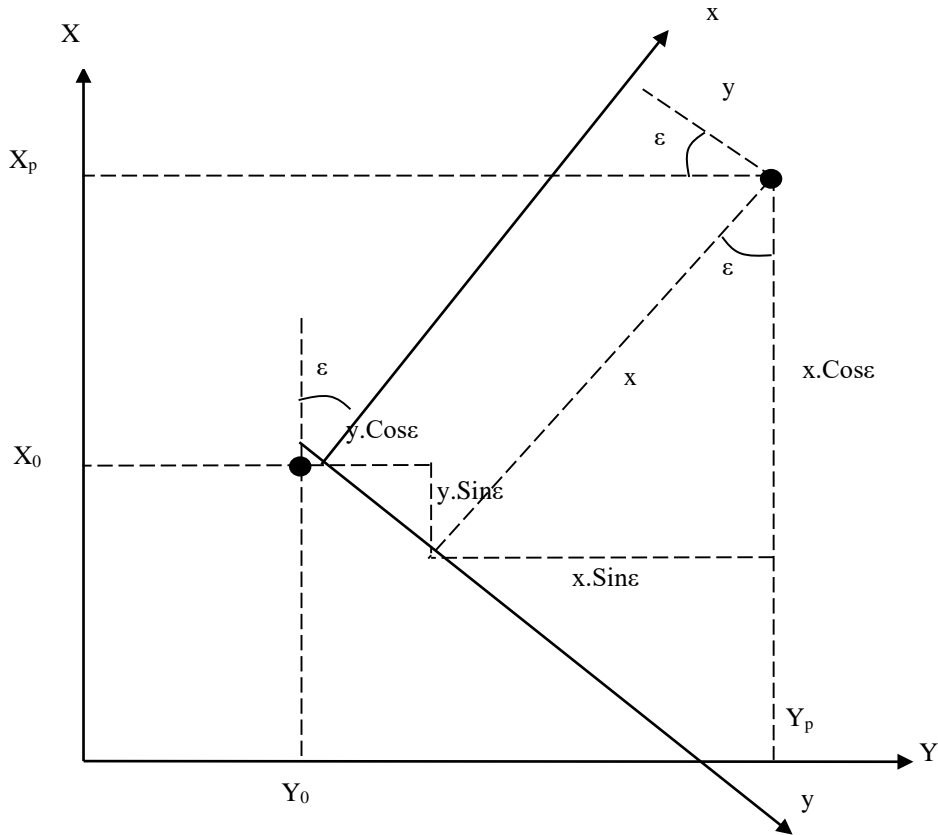


İki Boyutlu Benzerlik Dönüşümü

İki boyutlu benzerlik dönüşümü iki boyutlu dik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Burada koordinat eksenlerinin dik ve her iki ekseninde de aynı dönüklük ve ölçek faktörü olduğu kabul edilir. Benzerlik dönüşümünde geometrik şekillerin benzerliği korunur. Düzgün geometrik şekillerin kenarları aynı oranda küçülür ya da büyür. Açılarının mutlak değerleri değişmez kalır. Şekiller dönüşümden sonra esas şekle benzerler.

Benzerlik dönüşümünde 1 ölçek, 1 dönüklük ve 2 öteleme olmak üzere toplam 4 bağımsız parametre vardır. Dönüşümün tek anlamlı olması için iki sistemde de koordinatı bilinen iki ortak nokta gereklidir. İki den fazla ortak nokta mevcutsa dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemi ile dengeleme hesabı yapılır ve nokta sayısının iki katı kadar düzeltme denklemleri yazılabilir.



Şekil : Benzerlik dönüşümü

Bu şekilde bir noktanın koordinatı benzerlik dönüşümü için;

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + x_i * \cos \varepsilon - y_i * \sin \varepsilon \\ Y_i &= Y_0 + x_i * \sin \varepsilon + y_i * \cos \varepsilon \end{aligned}$$

eşitliğiyle hesaplanır. Ölçek katsayısı ölçümler arasındaki oransal fark olduğundan ötele parametrelerini etkilemez. Bu nedenle eşitliklerin öteleme harici kısımlarına eklenmelidir.

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + k * (x_i * \cos \varepsilon - y_i * \sin \varepsilon) = X_0 + k * x_i * \cos \varepsilon - k * y_i * \sin \varepsilon \\ Y_i &= Y_0 + k * (x_i * \sin \varepsilon + y_i * \cos \varepsilon) = Y_0 + k * x_i * \sin \varepsilon + k * y_i * \cos \varepsilon \end{aligned}$$

Bu eşitlikte $a = k * \cos \varepsilon$; $b = k * \sin \varepsilon$; $c = X_0$; $d = Y_0$ olarak alınır

$$\begin{aligned} X_i &= c + a * x_i - b * y_i \\ Y_i &= d + b * x_i + a * y_i \end{aligned} \quad (1)$$

eşitliği bulunur. Burada, $(x_i, y_i), (X_i, Y_i)$, k , ε ve a, b, c, d sırasıyla 1. ve 2. koordinat sisteminde koordinatlar, ölçek faktörü, koordinat eksenindeki dönüklük ve dönüşüm parametreleridir.

n tane ortak nokta için yazılacak düzeltme denklemleri;

$$\begin{aligned} X_1 + Vx_1 &= ax_1 - by_1 + c \\ Y_1 + Vy_1 &= bx_1 + ay_1 + d \\ X_2 + Vx_2 &= ax_2 - by_2 + c \\ Y_2 + Vy_2 &= bx_2 + ay_2 + d \\ &\dots\dots\dots \\ X_n + Vx_n &= ax_n - by_n + c \\ Y_n + Vy_n &= bx_n + ay_n + d \end{aligned}$$

Yazılır ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned} Vx_1 &= ax_1 - by_1 + c - X_1 \\ Vy_1 &= bx_1 + ay_1 + d - Y_1 \\ Vx_2 &= ax_2 - by_2 + c - X_2 \\ Vy_2 &= bx_2 + ay_2 + d - Y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ Vx_n &= ax_n - by_n + c - X_n \\ Vy_n &= bx_n + ay_n + d - Y_n \end{aligned}$$

Elde edilir. Bu eşitlik

$$\begin{bmatrix} Vx_1 \\ Vy_1 \\ \dots \\ \dots \\ Vx_n \\ Vy_n \end{bmatrix}_{2nx1} = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2nx4} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_{4x1} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix}_{2nx1}$$

$$V = A.x - \ell$$

şeklinde düzenlenir ve En Küçük Kareler yöntemine göre dengeleme işlemine devam edilir. Yapılan çözümden x bilinmeyenleri yani dönüşüm katsayıları;

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P \ell = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

hesaplanmış olur. Bu dönüşüm katsayıları kullanılarak sadece 1. Koordinat sisteminde koordinatı bilinen noktaların koordinatları (x,y) eşitlik (1) kullanılarak 2. Koordinat sistemine (X,Y) dönüştürülebilir.